

# Les espaces de suites $\ell^p$ -sommables

prof. Achour Dahmane et Dehimi Naima

24 juin 2018

---

## Remerciements

Louange à dieu et la prière et la paix sur le Messagier d'Allah, et après. D'abord, je remercie Allah Tout-Puissant, Qui nous aider pour cela et nous le demandons plus, puis je remercie beaucoup les parents, la famille et tous les camarades qui ont marché avec nous sur tout le chemin d'étude, et un grand merci à : mon directeur le professeur Dahman Achour, et un merci spéciale à Ferradi Athmane Finalement, je demande à Dieu la sincérité dans le dire et dans le travail.

---

# NOTATION

$\ell_p(X)$	L'espaces de Banach des suites p-sommables .
$\ell_{p,w}(X)$	L'espaces de Banach des suites faiblement p-sommables .
$\ell_p \langle X \rangle$	L'espace de Banach des suites Cohen fortement p-sommables .
$\ell_p^{mid}(X)$	Les espaces de suites mid p-sommables .
$\mathcal{L}(X, Y)$	Les espaces des opérateurs linéaires continues de $X$ dans $Y$ .
$\mathcal{L}_f(X, Y)$	L'espace des opérateurs de rang fini .
$\Pi_p(X, Y)$	L'espace des opérateurs linéaires p-sommants .
$\Pi_p^{mid}(X, Y)$	L'espace des opérateurs linéaires mid p-sommants .
$\mathcal{D}_p(X, Y)$	L'espace des opérateurs Cohen fortement p-sommants .
$W_p^{mid}(X, Y)$	L'espace des opérateurs faiblement mid p-sommants .

---

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>1 Préliminaires</b>	<b>3</b>
1.1 Opérateurs linéaires bornés . . . . .	3
1.2 Les espaces de suites à valeur d'un espace de Banach . . . . .	4
1.3 Idéal des opérateurs linéaires . . . . .	8
1.3.1 Définitions . . . . .	8
1.3.2 Les opérateurs p-sommants . . . . .	8
1.3.3 Les opérateurs Cohen fortement p-sommants . . . . .	10
<b>2 Les espaces de suites mid p-sommables</b>	<b>12</b>
2.1 L'espace $\ell_p^{mid}(X)$ . . . . .	12
2.2 Quelques propriétés . . . . .	17
<b>3 Les opérateurs mid p-sommants et faiblement mid p-sommants</b>	<b>20</b>
3.1 Définitions et propriétés . . . . .	20
3.2 Théorème de domination . . . . .	30
<b>Conclusion</b>	<b>33</b>

---

# BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. Defant and K. Floret, Tensor Norms and Operator Ideals, North-Holland, 1993.
- [2] A. Karn and D. Sinha, An operator summability of sequences in Banach spaces, Glasg. Math. J. **56**(2014), no. 2, 427-437.
- [3] A. Pitsch, Absolute p-summierende Abbildungen in normierten *Räumen*, Studia, Math. **28**(1967), 333-353.
- [4] A. Pietsch, Operator ideals. Deutsch. Verlag Wiss. Berlin, 1978; North-Holland, Amsterdam-London-New York-Tokyo, 1980.
- [5] D. Achour Cour 2<sup>ème</sup> Mastre Analyse Fonctionnel "Espaces de suites et leurs opérateurs". Université de M'sila, 2017.
- [6] H. Apiola, Duality between spaces of p-summable sequences, (p,q)-summing operators and characterizations of nuclearity, Math. Ann. **219**(1976), 53-64.
- [7] H. Brizes, Analyse fonctionnelle, théorie et application, MASSON Paris, New York Barcelone Milan Mexico Seo Paulo 1987.
- [8] J. Diestel, H. Jarchow, and A. Tonge, Absolutely summing operators. Cambridge University Press, 1995.
- [9] J. S. Cohen. Absolutely p-summing, p-nuclear operators and their conjugates, Math. Ann. **201**(1973), 177-200.

- [10] G Botelho, J. R. Campos E J Santos, Operator ideals related to absolutely Summing and Strongly summing oprators, Pacific J. Math. **287**(1) (2017), 1-17.
- [11] R. Ferreira Dias. O espaço das sequências mid somáveis e operadores mid sommants. Universidade Federal da Paraiba, 2017, 38-59.

---

# INTRODUCTION

En 2012, Karn et Sinha en définissent un nouvel espace de suite qu'ils appellent l'espace des suites mid  $p$ -sommables, ils étudient dans quelles conditions ce nouvel espace coïncide avec les espace de suites fortement  $p$ -sommables, faiblement  $p$ -sommables et une classe d'opérateurs définis entre le nouvel espace. En 2017, les chercheurs, G. Botelho, J. R. Campos et J. Santos, dans leur article [10] a repris l'étude de cet espace, ils définissent une norme complète pour ce nouvel espace, et étudier ces classes plus profondément.

L'objectif principal de notre travail de faire une étude détaillé à travers les références [2] [10] et [11].

Le mémoire est divisé en trois chapitres qui sont les suivantes.

Dans le premier chapitre, on donne un petit rappel sur les opérateurs linéaires bornés, et un aperçu générale sur les espaces de Banach de suites  $p$ -sommables, faiblement  $p$ -sommables et l'espace de Banach des suites Cohen fortement  $p$ -sommables, on enchainera par les opérateurs  $p$ -sommants et fortement  $p$ -sommants, de plus nous donnera le théorème de domination et factorisation de Pietsch.

L'objet du deuxième chapitre est d'étudier l'espace de suites mid  $p$ -sommables. On donnera la définition de cet espace, quelques propriétés et quelques théorèmes sur cet espace.

On termine ce travail par le troisième chapitre, dans ce chapitre représente une étude sur les opérateurs mid  $p$ -sommants et les opérateurs linéaires faiblement mid  $p$ -sommables,

et nous donnons aussi le théorème de domination pour les opérateurs faiblement mid p-sommables.



---

---

# Chapitre 1

---

## PRÉLIMINAIRES

### 1.1 Opérateurs linéaires bornés

**Définition 1.1.1.** Un opérateur linéaire  $T : X \rightarrow Y$  entre deux espaces de Banach est dit borné s'il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\|T(x)\| \leq C \|x\|, \quad \text{pour tout } x \in X.$$

On note  $\mathcal{L}(X, Y)$  l'espace vectoriel des opérateurs linéaires bornés de  $X$  dans  $Y$  qui est un espace de Banach sur  $\mathbb{K}(= \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$  muni de la norme définie par

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \in B_X} \|T(x)\|.$$

### Le dual topologique

L'espace des formes linéaires continues sur  $X$  est dit le dual topologique de  $X$ , noté par  $X^*$ . Pour  $x^* \in X^*$  et  $x \in X$  on notera généralement  $\langle x, x^* \rangle$  au lieu de  $x^*(x)$ .

La propriété suivante, que nous énonçons sans démonstration, est une conséquence du théorème de Hahn-Banach sur le prolongement des formes linéaires.

**Proposition 1.1.1.** [7] Soit  $X$  un espace de Banach. Pour tout  $x \in X$  on a

$$\|x\| = \sup_{\|x^*\| \leq 1} |\langle x, x^* \rangle|. \quad (1.1)$$

## L'adjoint d'un opérateur linéaire borné

Soit  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ , l'opérateur adjoint de  $T$  est l'unique opérateur linéaire borné  $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$  définie par

$$T^*(y^*)(x) = y^*(Tx)$$

i.e. ;

$$\langle x, T^*y^* \rangle = \langle Tx, y^* \rangle$$

pour tout  $x \in X$  et  $y^* \in Y^*$ .

Pour tout  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  et  $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$ , on a  $\|T\| = \|T^*\|$  et  $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$

## Isomorphisme, isométrie

L'application linéaire  $T : X \rightarrow Y$  est dite isomorphisme si  $T$  est bijective continue et  $T^{-1}$  continue .

De plus si  $\|T(x)\| = \|x\|$  pour tout  $x \in X$ , on dit que  $T$  est une isométrie .

Si l'isomorphisme  $T : X \rightarrow T(X)$  vérifie  $\|T(x)\| = \|x\|$  pour tout  $x \in X$ , on dit que  $T$  est une isométrie injective et on écrit  $T : X \hookrightarrow Y$  .

## 1.2 Les espaces de suites à valeur d'un espace de Banach

### L'espace de Banach des suites p-sommables $\ell_p(X)$

**Définition 1.2.1.** Soient  $X$  est un espace de Banach et  $1 \leq p < \infty$  on not

$$\ell_p(X) := \left\{ x = (x_n)_n \in X^{\mathbb{N}^*} : \sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|^p < \infty, n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

l'espace de Banach des suites p-sommables, tels que

$$\| (x_n)_n \|_p = \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \| x_n \|^p \right)^{\frac{1}{p}} .$$

pour  $p = +\infty$  on définit

$$\ell_\infty(X) := \left\{ x = (x_n)_n \in X^{\mathbb{N}^*} : \sup_n \| x_n \|_X < \infty, n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

est l'espace de Banach des suites  $\infty$ -sommables, tel que

$$\| (x_n)_n \|_\infty = \sup_n \| x_n \| .$$

### Inégalité de Hölder généralisé

Soient  $(X, \| \cdot \|)$  un espace vectoriel normé  $(x_i)_{i=1}^n, (y_i)_{i=1}^n$  deux suites finies d'éléments de  $X$  et  $0 < p, q, r \leq +\infty$  avec  $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ . Alors

$$\left( \sum_{i=1}^n \| x_i \|^r \| y_i \|^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq \left( \sum_{i=1}^n \| x_i \|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^n \| y_i \|^q \right)^{\frac{1}{q}} . \quad (1.2)$$

**Théorème 1.2.1.** *Soit  $X$  un espace de Banach et  $p \geq 1$ . Alors  $(\ell_p(X), \| \cdot \|_p)$  est un espace de Banach .*

**Proposition 1.2.1.** *Si  $1 \leq q \leq p \leq +\infty$  alors  $\ell_q(X) \subset \ell_p(X)$  et*

$$\| (x_i)_i \|_p \leq \| (x_i)_i \|_q$$

*pour tout  $(x_i)_i \in \ell_q(X)$  .*

**Proposition 1.2.2.** *[6] Soit  $1 < p < \infty$ . Alors :*

*(i)  $(\ell_p(X))^* = \ell_{p^*}(X^*)$  isométriquement.*

*(ii)  $(\ell_1(X))^* = \ell_\infty(X^*)$  isométriquement.*

### L'espace de Banach des suites faiblement p-sommables $\ell_{p,w}(X)$

**Définition 1.2.2.** Soient  $X$  un espace de Banach, et  $1 \leq p < \infty$ . on not

$$\ell_{p,w}(X) := \left\{ x = (x_n)_n \in X^{\mathbb{N}^*}; \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left( \sum_{n=1}^{\infty} |\langle \varphi, x_n \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

l'espace de Banach des suites faiblement p-sommables, tel que

$$\| (x_n)_n \|_{p,w} := \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left( \sum_{n=1}^{\infty} |\langle \varphi, x_n \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour  $p = \infty$ , on définit  $\ell_{\infty,w}(X) = \ell_{\infty}(X)$  est on a

$$\| (x_n)_n \|_{\infty,w} = \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left( \sup_n |\langle \varphi, x_n \rangle| \right).$$

**Remarque 1.2.1.** On a  $\ell_{\infty,w}(X) = \ell_{\infty}(X)$  l'espace des suites bornées dans X car

$$\| (x_i)_i \|_{\infty,w} = \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left( \sup_i |\langle x_i, x^* \rangle| \right) = \sup_i \left( \sup_{x^* \in B_{X^*}} |\langle x_i, x^* \rangle| \right) = \sup_i \| x_i \| = \| (x_i)_i \|_{\infty}.$$

**Proposition 1.2.3.** Soit  $X$  un espace de Banach et  $1 \leq p \leq \infty$ . Alors

$(\ell_{p,w}(X), \| \cdot \|_{p,w})$  est un espace de Banach.

**Remarque 1.2.2.**  $\ell_p(X) \subset \ell_{p,w}(X)$  car, pour toute  $(x_n)_n \in \ell_p(X)$  on a

$$\begin{aligned} \| (x_n)_n \|_{p,w} &= \sup_{\varphi \in B^*} \left( \sum_{n=1}^{\infty} |\langle \varphi, x_n \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \sup_{\varphi \in B^*} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \| x_n \|^p \| \varphi \|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left( \sum_{n=1}^{\infty} \| x_n \|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \| (x_n)_n \|_p < \infty. \end{aligned}$$

## L'espace de Banach des suites Cohen fortement p-sommables $\ell_p \langle X \rangle$

Maintenant nous pourrions définir un espace des suites qui a été introduit par Cohen [9].

**Définition 1.2.3.** Soit  $1 \leq p \leq \infty$ . Une suite  $(x_i)_{i=1}^{\infty}$  est dite Cohen fortement p-sommable, si pour toute suite  $(x_i^*)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{p^*,w}(X^*)$ , la série  $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^*(x_i)$  est convergente. Dans ce cas on note par  $\ell_p \langle X \rangle$  l'espace des suites  $(x_i)_{i=1}^{\infty}$  dans X Cohen fortement p-sommable.

**Théorème 1.2.2.** *L'espace  $\ell_p \langle X \rangle$  est un espace normé muni de la norme défini par*

$$\| (x_i)_{i=1}^\infty \|_{C,p} := \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^\infty x_i^*(x_i) \right| : \| (x_i^*)_{i=1}^\infty \|_{p^*,w} \leq 1 \right\}.$$

**Théorème 1.2.3.** *Soit  $X$  un espace de Banach on a*

1.  $\ell_p \langle X \rangle \subseteq \ell_p(X) \subseteq \ell_{p,w}(X)$  de plus

$$\| (x_i)_{i=1}^\infty \|_{p,w} \leq \| (x_i)_{i=1}^\infty \|_p \leq \| (x_i)_{i=1}^\infty \|_{C,p}$$

*pour tout  $(x_i)_{i=1}^\infty \in \ell_p \langle X \rangle$ .*

2. Si  $p = 1$ , on a  $\ell_1 \langle X \rangle = \ell_1(X)$  et

$$\| (x_i)_{i=1}^\infty \|_1 = \| (x_i)_{i=1}^\infty \|_{C,p}.$$

*Démonstration.*

1. Soit  $(x_i)_{i=1}^\infty$  dans  $\ell_p(X)$ , d'après la Remarque 1.2.2 et le théorème de Hahn Banach, on peut écrire

$$\begin{aligned} \| (x_i)_{i=1}^\infty \|_p &= \left( \sum_{i=1}^\infty \| x_i \|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{(x_i^*)_{i=1}^\infty \in B_{\ell_{p^*}(X^*)}} \left| \sum_{i=1}^\infty x_i^*(x_i) \right| \\ &\leq \sup_{(x_i^*)_{i=1}^\infty \in B_{\ell_{p^*,w}(X^*)}} \left( \sum_{i=1}^\infty |x_i^*(x_i)| \right) \\ &= \| (x_i)_{i=1}^\infty \|_{C,p}. \end{aligned}$$

Alors  $\ell_p \langle X \rangle \subseteq \ell_p(X)$ .

2. Soit  $(x_i)_{i=1}^\infty$  dans  $\ell_1 \langle X \rangle$  et  $p = 1$ . D'après le théorème de Hahn Banach on a

$$\| (x_i)_{i=1}^\infty \|_{C,1} = \sup_{(x_i^*)_{i=1}^\infty \in B_{\ell_\infty^w(X^*)}} \left( \sum_{i=1}^\infty |x_i^*(x_i)| \right) = \sup_{(x_i^*)_{i=1}^\infty \in B_{\ell_\infty}} \left( \sum_{i=1}^\infty |x_i^*(x_i)| \right) = \| (x_i)_{i=1}^\infty \|_1.$$

Alors  $\ell_1 \langle X \rangle = \ell_1(X)$ .

□

**Proposition 1.2.4.** *Soit  $X$  un espace de Banach et  $1 \leq p \leq \infty$ . Alors l'espace  $(\ell_p \langle X \rangle, \| \cdot \|_{C,p})$  est un espace de Banach.*

**Proposition 1.2.5. [6]**

- 1)  $(\ell_{p,w}(X))^* = \ell_{p^*,w}(X^*)$  isométriquement, pour  $1 \leq p \leq \infty$ .
- 2)  $(\ell_p(X))^* = \ell_{p^*,w}(X^*)$  isométriquement pour  $1 \leq p \leq \infty$ .

## 1.3 Idéal des opérateurs linéaires

### 1.3.1 Définitions

**Définition 1.3.1. (Opérateur de rang fini)** Un opérateur linéaire continu  $T$  de  $X$  dans  $Y$  est de rang fini si  $\dim T(X) < \infty$ .

L'espace des opérateurs linéaires de rang fini sera noté  $\mathcal{L}_f(X, Y)$ .

**Définition 1.3.2. [4]** Une classe  $I$  des opérateurs linéaires bornés est dite idéal des opérateurs linéaires si

- (a)  $I(X, Y)$  est un sous espace vectoriel de  $\mathcal{L}(X, Y)$  et  $\mathcal{L}_f(X, Y) \subset I(X, Y)$  pour tout espaces de Banach  $X$  et  $Y$ .
- (b) **Propriété d'idéal.** Si  $u \in \mathcal{L}(E, X), T \in I(X, Y)$  et  $v \in \mathcal{L}(Y, F)$ , alors  $v \circ T \circ u \in I(E, F)$ .

De plus, si  $\| \cdot \|_I: I(X, Y) \longrightarrow \mathbb{R}_+$  satisfait.

- (i)  $(I(X, Y), \| \cdot \|_I)$  est un espace normé (Banach).
- ii)  $\| id_{\mathbb{K}} \|_I = 1$ .
- iii)  $\| v \circ T \circ u \|_I \leq \| v \| \| T \|_I \| u \|$ .

Alors  $(I(X, Y), \| \cdot \|_I)$  s'appelle idéal normé (de Banach) des opérateurs linéaires.

**Remarque 1.3.1.** Les opérateurs  $\mathcal{L}_f(X, Y)$  et  $\mathcal{L}(X, Y)$  sont des idéaux linéaires.

### 1.3.2 Les opérateurs p-sommants

**Définition 1.3.3.** Soit  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $X$  et  $Y$  deux espaces de Banach. Soit  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ , on dit que  $T$  est p-sommant s'il existe une constante positive  $C$  tel que pour tout  $(x_i)_{i=1}^n$

de  $X$ , on ait

$$\left( \sum_{i=1}^n \|T(x_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\xi \in B_{X^*}} (|\langle \xi, x_i \rangle|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

i.e. ;

$$\| (T(x_i)_{i=1}^n) \|_p \leq C \| (x_i)_{i=1}^n \|_{p,w}. \quad (1.3)$$

On note l'espace des opérateurs linéaires  $p$ -sommants de  $X$  dans  $Y$  par  $\Pi_p(X, Y)$  et muni de la norme

$$\pi_p(T) = \inf \{C, C \text{ vérifiant 1.3}\}.$$

**Remarque 1.3.2.** Si  $T \in \Pi_p(X, Y)$  alors

$$(i) \quad \| (T(x_i)_{i=1}^n) \|_p \leq \pi_p(T) \| (x_i)_{i=1}^n \|_{p,w}.$$

$$(ii) \quad \| T \| \leq \pi_p(T).$$

**Proposition 1.3.1.** Soit  $T$  un opérateur linéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes.

$$(a) \quad T \in \Pi_p(X, Y) \text{ et } \pi_p(T) \leq C$$

$$(b) \quad \text{Il existe une constante } C > 0 \text{ telle que}$$

$$\| (T(x_i)_{i=1}^\infty) \|_p \leq C \| (x_i)_{i=1}^\infty \|_{p,w}, \quad (1.4)$$

$$\text{pour tout } (x_i)_{i=1}^\infty \in \ell_{p,w}(X).$$

**Théorème 1.3.1. (théorème d'inclusion)** Soit  $1 \leq p < q < \infty$  alors

$$\Pi_p(X, Y) \subset \Pi_q(X, Y)$$

et

$$\pi_q(T) \leq \pi_p(T) \quad \forall T \in \Pi_p(X, Y)$$

**Proposition 1.3.2.**  $[\Pi_p(X, Y), \pi_p(\cdot)]$  est un idéal de Banach.

**Théorème 1.3.2. (théorème de Domination et Factorisation)[8]** Soit  $1 \leq p < \infty$  et  $X, Y$  deux espaces de Banach,  $K = (B_{X^*}, \sigma(X^*, X))$  l'espace compact obtenu en munissant la boule unité de  $X^*$  de la topologie faible\*. Pour tout opérateur  $T \in \mathcal{L}(X; Y)$ , les conditions suivantes sont équivalentes.

i)  $T$  est  $p$ -sommant.

ii) S'il existe une probabilité  $\mu$  sur  $K$  et une constante  $C > 0$  telle que

$$\|T(x)\| \leq c \left( \int_K |\langle x, \xi \rangle|^p d\mu(\xi) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

iii) Il existe une mesure de probabilité  $\mu$  sur  $K$ , un sous espace fermé  $Z$  de  $L_p(\mu)$  et un opérateur  $\widehat{T} \in \mathcal{L}(Z; Y)$  tels que

a)  $j_p i_X(X) \subset Z$ .

b)  $\widehat{T} j_p i_X(x) = T(x)$ , pour tout  $x \in X$ .

En d'autres termes, si  $j_p^X : i_X(X) \rightarrow Z$  est l'application induite par

$j_p : C(K) \rightarrow L_p(\mu)$ , comme  $i_X(X) \subset C(K)$  et  $Z \subset L_p(\mu)$ , alors le diagramme suivante commute

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ i_X \downarrow & & \uparrow \widehat{T} \\ i_X(X) & \xrightarrow{j_p^X} & Z \\ \downarrow & & \downarrow \\ C(K) & \xrightarrow{j_p} & L_p(\mu) \end{array}$$

### 1.3.3 Les opérateurs Cohen fortement $p$ -sommants

**Définition 1.3.4.** Soit  $1 < p \leq \infty$ , et  $X, Y$  deux espaces de Banach, un opérateur linéaire borné  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  est Cohen fortement  $p$ -sommant s'il transforme toute suite  $p$ -sommable à une suite Cohen fortement  $p$ -sommable.

C'est-à-dire l'opérateur

$$\begin{aligned} T : \ell_p(X) &\longrightarrow \ell_p(Y) \\ (x_i)_{i=1}^\infty &\longmapsto (T(x_i))_{i=1}^\infty \end{aligned}$$

est bien défini.

L'espace des opérateurs linéaires Cohen fortement  $p$ -sommants de  $X$  dans  $Y$ , noté par  $\mathcal{D}_p(X, Y)$ . Pour  $p = 1$ ,  $\mathcal{D}_1(X, Y) = \mathcal{L}(X, Y)$



**Proposition 1.3.3.** *Soit  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  et  $1 < p \leq \infty$ , alors les propriétés suivantes sont équivalent .*

(i)  *$T$  est Cohen fortement  $p$ -sommant .*

(ii) *Il existe une constante  $C > 0$  telle que*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i(T(x_i))| \leq C \| (x_i)_{i=1}^{\infty} \|_p \| (\varphi_i)_{i=1}^{\infty} \|_{p^*, w}$$

*pour tout  $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_p(X)$  et tout  $(\varphi_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{p, w}(Y^*)$  .*

(iii) *Il existe une constante  $C > 0$  telle que*

$$\sum_{i=1}^n |\varphi_i(T(x_i))| \leq C \| (x_i)_{i=1}^n \|_p \| (\varphi_i)_{i=1}^n \|_{p^*, w} \quad (1.5)$$

*pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_i \in X$ ,  $\varphi_i \in Y^*$ ,  $i = 1, \dots, n$  .*

**Remarque 1.3.3.** Si  $T \in \mathcal{D}_p(X, Y)$  alors

$$\| T \| \leq d_p(T) . \quad (1.6)$$

**Proposition 1.3.4.** *[9]  $(\mathcal{D}_p(X, Y), d_p(\cdot))$  est un idéal de Banach .*

---

---

## Chapitre 2

---

# LES ESPACES DE SUITES MID P-SOMMABLES

Dans ce chapitre, nous donnons le nouvel espace de suite défini par Karn et sinha [2], le nom de ce espace est l'espace des suites de l'opérateurs p-sommables, ce nom a été changé dans travail [10] par un nom plus pratique c'est l'espace des suites mid p-sommables, la nécessité de ce changement sera claire dans la chapitre troisième . Nous allons commencer maintenant par la définition adoptée dans la travail de Btelho et dans [10] équivalent à la définition originale de travail de Karn et Sinha .

### 2.1 L'espace $\ell_p^{mid}(X)$

**Définition 2.1.1.** Soit  $(x_j)_{j=1}^{\infty}$  une suite des éléments d'un espace de Banach  $X$ .  $(x_j)_{j=1}^{\infty}$  est dite mid p-sommable si  $(\varphi_n(x_j)_{j=1}^{\infty})_{n=1}^{\infty} \in \ell_p(\ell_p)$ , pour tout  $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_{p,w}(X^*)$ . On note

$$\ell_p^{mid}(X) := \left\{ (x_j)_{j=1}^{\infty} \in X^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_n(x_j)|^p < \infty; \text{ pour tout } (\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_{p,w}(X^*) \right\}$$

l'espace de suites mid p-sommables muni de la norme

$$\| (x_j)_{j=1}^{\infty} \|_{p,mid} = \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_{p,w}(X^*)}} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_n(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

**Définition 2.1.2.** Soit  $X$  un espace vectoriel normé on définit l'espace  $c_{00}(X)$  par

$$c_{00}(X) := \{ (x_j)_{j=1}^{\infty} \in X^{\mathbb{N}} : \exists j_0 \in \mathbb{N} \ x_j = 0 \ \forall j \geq j_0 \}.$$

**Définition 2.1.3.** Soit la suite  $(x_j)_{j=1}^{\infty}$  dans  $X$  est dite inconditionnellement p-sommable si

$$\lim_n \| (x_j)_{j=n}^{\infty} \|_{p,w} = 0.$$

On le note par

$$\ell_p^u(X) := \left\{ (x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(X) : \lim_n \| (x_j)_{j=n}^{\infty} \|_{p,w} = 0 \right\}. \quad (2.1)$$

**Théorème 2.1.1.** [2] Soit  $X$  un espace de Banach et  $1 \leq p < \infty$  alors.

1.  $\ell_p^{mid}(X) = \ell_{p,w}(X)$  si et seulement si  $\Pi_p(X, \ell_p) = \mathcal{L}(X, \ell_p)$ .
2.  $\ell_p^{mid}(X) = \ell_p(X)$  si et seulement si  $X$  un sous-espace de  $L_p(\mu)$  pour la mesure de Borel  $\mu$ .

On dit que un espace de Banach  $X$  est un faiblement mid p-sommable si  $\ell_p^{mid}(X) = \ell_{p,w}(X)$ ; et est dit fortement mid p-sommable si  $\ell_p^{mid}(X) = \ell_p(X)$ .

**Lemme 2.1.1.** Si  $X$  est de dimension infini, alors la norme  $\| \cdot \|_p$  et  $\| \cdot \|_{p,w}$  ne sont pas équivalentes dans  $c_{00}(X)$ . En particulier  $\ell_p(X)$  n'est pas fermé dans  $\ell_{p,w}(X)$ .

*Démonstration.* Premièrement il est clair que  $c_{00}(X)$  est dense dans  $(\ell_p(X), \| \cdot \|_{p,w})$  et par la définition de  $\ell_p^u(X)$ ,  $c_{00}(X)$  est dense dans  $(\ell_p(X), \| \cdot \|_p)$  aussi bien. En fait pour le premier cas, soit  $x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(X)$  et  $\varepsilon > 0$ , alors il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que

$$\left( \sum_{j=n_0+1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon$$

comme  $c_{00}(X) \subseteq \ell_p(X)$ , la suite

$$x' = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n_0}, 0, 0, 0, \dots) \in c_{00}(X)$$

et

$$\|x - x'\|_p = \left( \sum_{j=n_0+1}^{\infty} \|x_j\|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Maintenant, supposons que les normes  $\|\cdot\|_p$  et  $\|\cdot\|_{p,w}$  est équivalent sur  $c_{00}(X)$ . Alors

$$\ell_p(X) = \overline{c_{00}}^{\|\cdot\|_p} = \overline{c_{00}}^{\|\cdot\|_{p,w}} = \ell_p^u(X).$$

Donc, comme  $\ell_p(X) = \ell_p^u(X)$ , il s'ensuit que l'opérateur induite dans  $X$  est p-sommant par la théorème de DVORTZRY ROGERS FRACO. Pour conclure, supposons que  $\ell_p(X)$  et fermé dans  $\ell_p^u(X)$ , donc nous avons que  $(\ell_p(X), \|\cdot\|_p)$  et  $(\ell_p^u(X), \|\cdot\|_{p,w})$  sont complets. Donc l'application induite

$$\begin{aligned} i : (\ell_p(X), \|\cdot\|_p) &\longrightarrow (\ell_p(X), \|\cdot\|_{p,w}) \\ (x_j)_{j=1}^{\infty} &\longmapsto i((x_j)_{j=1}^{\infty}) \end{aligned}$$

est linéaire, bijective et continue, car  $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in (\ell_p(X), \|\cdot\|_p)$  nous avons

$$\|i((x_j)_{j=1}^{\infty})\|_{p,w} = \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{p,w} \leq \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_p \quad (2.2)$$

Donc  $\ell_p(X) \xhookrightarrow{1} \ell_{p,w}(X)$ , par la théorème de application ouvert, c'est-à-dire un isomorphisme alors

$$\|i^{-1}((x_j)_{j=1}^{\infty})\|_p = \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{p,w} \leq \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{p,w} \quad (2.3)$$

d'après (2.2) et (2.3) on obtiens

$$\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{p,w} \leq \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_p \leq \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{p,w}$$

pour tout  $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(X)$ , par conséquent pour tout  $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in c_{00}(X) \subseteq \ell_p(X)$  on conclure que les normes  $\|\cdot\|_p$  et  $\|\cdot\|_{p,w}$  sont équivalent dans  $c_{00}(X)$ .  $\square$

**Lemme 2.1.2.** *Pour chaque  $(x_j)_{j=1}^{\infty}$  dans  $\ell_p^{mid}(X)$  on ait*

$$\sup_{(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_{p,w}(X^*)} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_n(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

**Théorème 2.1.2.**  *$(\ell_p^{mid}(X), \|\cdot\|_{p,mid})$  est un espace de Banach .*

*Démonstration.* Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$  ,  $(x_j)_j \text{ et } (y_j)_j \in \ell_p^{mid}(X)$  on a

$$\begin{aligned}
 \| \lambda(x_j)_{j=1}^\infty \|_{p,mid} &= \| (\lambda x_j)_{j=1}^\infty \|_{p,mid} \\
 &= \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(X^*)} \left( \sum_{n=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty |\varphi_n(\lambda x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &= \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(X^*)} \left( \sum_{n=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty \|\lambda\|^p |\varphi_n(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &= |\lambda| \cdot \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(X^*)} \left( \sum_{n=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty |\varphi_n(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &= |\lambda| \cdot \| (x_j)_{j=1}^\infty \|_{p,mid} .
 \end{aligned}$$

Alors  $\lambda(x_j)_j \in \ell_p^{mid}(X)$  et  $\| \lambda(x_j)_j \|_{p,mid} = |\lambda| \| (x_j)_{j=1}^\infty \|_{p,mid}$ . D'autre part on a

$$\begin{aligned}
 \| (x_j)_{j=1}^\infty + (y_j)_{j=1}^\infty \|_{p,mid} &= \| (x_j + y_j)_{j=1}^\infty \|_{p,mid} \\
 &= \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \ell_{p,w}(X^*)} \left( \sum_{n=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty |\varphi_n(x_j + y_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &= \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \ell_{p,w}(X^*)} \left( \sum_{n=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty |\varphi_n(x_j) + \varphi_n(y_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &= \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \ell_{p,w}(X^*)} \left( \sum_{n=1}^\infty \left( \left( \sum_{j=1}^\infty |\varphi_n(x_j) + \varphi_n(y_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &= \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \ell_{p,w}(X^*)} \left( \sum_{n=1}^\infty \| (\varphi_n(x_j))_{j=1}^\infty + (\varphi_n(y_j))_{j=1}^\infty \|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \ell_{p,w}(X^*)} \left( \sum_{n=1}^\infty (\| (\varphi_n(x_j))_{j=1}^\infty \|_p + \| (\varphi_n(y_j))_{j=1}^\infty \|_p)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &= \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \ell_{p,w}(X^*)} \left( \sum_{n=1}^\infty \| (\varphi_n(x_j))_{j=1}^\infty \|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} + \\
 &\quad \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \ell_{p,w}(X^*)} \left( \sum_{n=1}^\infty \| (\varphi_n(y_j))_{j=1}^\infty \|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &= \| (x_j)_{j=1}^\infty \|_{p,mid} + \| (y_j)_{j=1}^\infty \|_{p,mid} .
 \end{aligned}$$

Alors  $(x_j)_j + (y_j)_j \in \ell_{p,w}(X)$  et  $\| (x_j)_j + (y_j)_j \|_{p,mid} \leq \| (x_j)_{j=1}^\infty \|_{p,mid} + \| (y_j)_{j=1}^\infty \|_{p,mid}$ .  
On a aussi  $\| (x_i)_{i=1}^\infty \|_{p,mid} = 0$  implique que

$$\sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_{p,w}(X^*)}} \left( \sum_{n=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty |\varphi_n(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0.$$

Ceci donne

$$\langle \varphi_n, x_j \rangle = 0 \text{ pour tout } j \in \mathbb{N}.$$

Alors  $(x_j)_j = 0$  ce que montre que  $\ell_p^{mid}(X)$  est un espace vectoriel norme. Nous montrons que  $\ell_p^{mid}(X)$  est complet pour la norme  $\| \cdot \|_{p,mid}$ . Soit  $(x^k)$  une suite de Cauchy dans  $\ell_p^{mid}(X)$ , pour chaque  $k \in \mathbb{N}$  posons  $x^k = (x_j^k)_{j=1}^\infty \in \ell_p^{mid}(X)$ . Alors pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tel que

$$\| x^k - x^r \|_{p,mid} = \| (x_j^k - x_j^r)_{j=1}^\infty \|_{p,mid} = \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \ell_{p,w}(E^*)} \left( \sum_{n=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty |\varphi_n(x_j^k - x_j^r)|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \quad (2.4)$$

pour chaque  $k, r \geq k_0$ , procéder de manière tout à fait analogue à ce que se faisait dans l'espace  $\ell_p^w(X)$ , on obtient que la suite  $(x_j^k)_{k=1}^\infty$  est de Cauchy en  $X$ , pour chaque  $j \in \mathbb{N}$ . Alors, comme  $X$  est un espace de Banach pour chaque  $j \in \mathbb{N}$ ,  $\exists y_j \in X$  tel que  $x_j^k \xrightarrow{k} y_j$  en  $X$ .

Posons

$$y = (y_j)_{j=1}^\infty \in X.$$

Maintenant, il suffit de montrer que  $y \in \ell_p^{mid}(X)$  et  $\| x^k - y \|_{p,mid} \xrightarrow{k} 0$ .

En faisant tendre  $r \rightarrow \infty$  dans (2.4) et on obtient

$$\| (x_j^k - y_j)_{j=1}^\infty \|_{p,mid} < \varepsilon, \text{ pour chaque } k \geq k_0.$$

Il suffit de montrer que  $\| x_j^k - y \|_{p,mid} \xrightarrow{k} 0$ , et la suite  $(x^k - y) \in \ell_p^{mid}(X)$ , pour tout  $k \geq k_0$ . Par conséquent, pour  $k = k_0$  nous avons  $(x_0^k - y) \in \ell_p^{mid}(X)$  et donc, comme  $\ell_p^{mid}(X)$  est un espace vectoriel, on a  $y = x^{k_0} - (x_0^k - y) \in \ell_p^{mid}(X)$ .

Donc  $\ell_p^{mid}(X)$  est un espace de Banach. □

## 2.2 Quelques propriétés

**Proposition 2.2.1.** *Les propriétés suivantes sont équivalentes pour l'espace faiblement mid  $p$ -sommable  $X$*

- (a)  $\ell_p(X)$  est fermé dans  $\ell_p^{mid}(X)$ .
- (b) Les normes  $\| \cdot \|_p$  et  $\| \cdot \|_{p,mid}$  sont équivalentes dans  $\ell_p(X)$ .
- (c) Les normes  $\| \cdot \|_p$  et  $\| \cdot \|_{p,mid}$  sont équivalentes dans  $c_{00}(X)$ .
- (d)  $X$  est de dimensions fini.

*Démonstration.* (a)  $\Rightarrow$  (b) Soit  $\ell_p(X)$  fermé dans  $\ell_p^{mid}(X)$ . Alors  $(\ell_p(X), \| \cdot \|_p)$  et  $(\ell_p(X), \| \cdot \|_{p,mid})$  est complets. Donc, comme le lemme précédent, l'application identité entre les deux espace est continu, soit  $(x_j)_{j=1}^\infty \in (\ell_p(X), \| \cdot \|_p)$  nous avons

$$\| i((x_j)_{j=1}^\infty) \|_{p,mid} = \| (x_j)_{j=1}^\infty \|_{p,mid} \leq \| (x_j)_{j=1}^\infty \|_p \quad (2.5)$$

donc  $\ell_p(X) \xhookrightarrow{1} \ell_p^{mid}(X)$ . Donc par la théorème des application ouvert c'est-à-dire un isomorphisme et

$$\| i((x_j)_{j=1}^\infty) \|_p = \| (x_j)_{j=1}^\infty \|_p \leq \| (x_j)_{j=1}^\infty \|_{p,mid} \quad (2.6)$$

d'après (2.5) et (2.2) on obtient

$$\| i((x_j)_{j=1}^\infty) \|_{p,mid} \leq \| (x_j)_{j=1}^\infty \|_p \leq \| (x_j)_{j=1}^\infty \|_{p,mid}$$

pour tout  $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p(X)$ .

(b)  $\Rightarrow$  (c) Il résulte du fait que  $c_{00}(X) \subseteq \ell_p(X)$ .

(c)  $\Rightarrow$  (d) comme  $X$  est un espace faiblement  $p$ -mid par le théorème des applications ouvertes les normes  $\| \cdot \|_{p,mid}$  et  $\| \cdot \|_{p,w}$  sont équivalent dans  $\ell_p^{mid}(X) = \ell_{p,w}(X)$ , par conséquent sont équivalent dans  $c_{00}(X)$ . Par (b) les normes  $\| \cdot \|_p$  et  $\| \cdot \|_{p,mid}$  sont équivalent, en particules dans l'espace  $c_{00}(X)$ . De cette façon par le lemme (2.1.1), il s'ensuit que  $X$  est un espace de démonitions fini.

(d)  $\Rightarrow$  (a) comme  $X$  est un espace faiblement  $p$ -mid, nous avons  $\ell_p^{mid}(X) = \ell_{p,w}(X)$ . Donc  $X$  est de démonitions fini, par le lemme (2.1.1)  $\ell_p(X)$  est fermé dans  $\ell_{p,w}(X) = \ell_p^{mid}(X)$

□

De même, nous avons.

**Proposition 2.2.2.** *Les propositions suivantes sont équivalentes pour l'espace fortement  $p$ -sommable  $X$*

- (a)  $\ell_p(X)$  est fermé dans  $\ell_{p,w}(X)$ .
- (b) Les normes  $\| \cdot \|_{mid,p}$  et  $\| \cdot \|_{p,w}$  sont équivalentes dans  $\ell_p^{mid}(X)$ .
- (c) Les normes  $\| \cdot \|_{mid,p}$  et  $\| \cdot \|_{p,w}$  sont équivalentes dans  $c_{00}(X)$ .
- (d)  $X$  est de dimensions fini.

**Proposition 2.2.3.** *Soit  $X$  un espace de Banach. Alors*

$$\ell_p(X) \xhookrightarrow{1} \ell_p^{mid}(X) \xhookrightarrow{1} \ell_{p,w}(X) .$$

*Démonstration.* Soit la suite  $(\varphi_1, 0, 0, \dots) \in B_{\ell_{p,w}(X^*)}$  pour tout  $\varphi_1$  est dans  $B_{X^*}$ .

En effet

$$\begin{aligned} \| (\varphi_1, 0, 0, \dots) \|_{p,w} &= \sup_{\psi \in B_{X^{**}}} \left( \sum_{j=1}^{\infty} |\psi(\varphi_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{\psi \in B_{X^{**}}} |\psi(\varphi_1)| = \| \varphi_1 \| . \end{aligned}$$

Donc, si  $(x_j)_{j=1}^{\infty}$  dans  $\ell_p^{mid}(X)$ , nous avons

$$\begin{aligned} \| (x_j)_{j=1}^{\infty} \|_{p,w} &= \sup_{\varphi_1 \in B_{X^*}} \left( \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_1(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{(\varphi_1, 0, 0, \dots) \in B_{\ell_{p,w}(X^*)}} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_n(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_{p,w}(X^*)}} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_n(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \| (x_j)_{j=1}^{\infty} \|_{p,mid} . \end{aligned}$$

Ce qui montre  $\ell_p^{mid}(X) \xhookrightarrow{1} \ell_{p,w}(X)$  et  $\| (x_j)_j \|_{p,w} \leq \| (x_j)_j \|_{p,mid}$ , pour la deuxième inclusion, si  $(\varphi_j)_{n=1}^{\infty} \in \ell_{p,w}(X^*)$  et d'après le théorème de Goldstien, nous avons

$$\| (\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \|_{p,w}^p = \sup_{x \in B_E} \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(x)|^p .$$



Soit  $(x_j)_{j=1}^\infty$  dans  $\ell_p(X)$ , on définit l'ensemble suivante  $J = \{j \in \mathbb{N} : x_j \neq 0\}$ , on obtient

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(x_j)|^p &= \sum_{j \in J} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \varphi_n \left( \frac{x_j}{\|x_j\|}, \|x_j\| \right) \right|^p \\
 &= \sum_{j \in J} \left( \|x_j\|^p \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left| \varphi_n \left( \frac{x_j}{\|x_j\|} \right) \right|^p \right) \\
 &\leq \sum_{j \in J} \left( \|x_j\|^p \cdot \left( \sup_{x \in B_X} \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(x)|^p \right) \right) \\
 &= \left( \sup_{x \in B_X} \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(x)|^p \right) \cdot \left( \sum_{j \in J} \|x_j\|^p \right) \\
 &\leq \|(\varphi_n)_{n=1}^\infty\|_{p,w}^p \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p .
 \end{aligned}$$

On prend le  $\sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_{p,w}(X^*)}}$  sur les deux cotés. Donc on a l'inégalité suivant  
 $\|\cdot\|_{p,mid} \leq \|\cdot\|_p$ . Alors

$$\ell_p(X) \xhookrightarrow{1} \ell_p^{mid}(X).$$

Finalement on a

$$\ell_p(X) \xhookrightarrow{1} \ell_p^{mid} \xhookrightarrow{1} \ell_{p,w}(X) .$$

□

---

---

## Chapitre 3

---

# LES OPÉRATEURS MID P-SOMMANTS ET FAIBLEMENT MID P-SOMMENTS

Dans ce chapitre nous allons étudier certaines classe opérateurs mid sommants . Maintenant, on prend  $1 \leq p < \infty$  et  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  est un opérateur linéaire continu.

### 3.1 Définitions et propriétés

**Définition 3.1.1. (Opérateur mid p-sommant)** Soit  $X$  un espace de Banach et  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ . On dit que  $T$  est mid p-sommant si

$$\begin{aligned}\widehat{T} : \ell_p^{mid}(X) &\longrightarrow \ell_p(Y) \\ (x_j)_{j=1}^\infty &\longmapsto \widehat{T}((x_j)_{j=1}^\infty) = (T(x_j))_{j=1}^\infty\end{aligned}$$

est bien défini. L'espace des opérateurs mid p-sommants est noté par  $\Pi_p^{mid}(X, Y)$ .

**Théorème 3.1.1.** *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(1)  $T \in \Pi_p^{mid}(X, Y)$ .

(2) *L'opérateur*

$$\begin{aligned}\widehat{T} : \ell_p^{mid}(X) &\rightarrow \ell_p(Y) \\ (x_j)_{j=1}^\infty &\mapsto \widehat{T}((x_j)_{j=1}^\infty) = (T(x_j))_{j=1}^\infty\end{aligned}$$

*est bien défini, linéaire et continu.*

(3) *Il existe une constante  $C > 0$ . Telle que*

$$\| (T(x_j))_{j=1}^k \|_p \leq C \cdot \| (x_j)_{j=1}^k \|_{p,mid} \quad (3.1)$$

*pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et tout  $x_j \in X$   $j = 1, \dots, k$ .*

(4) *Il existe une constante  $C > 0$ . Telle que*

$$\| (T(x_j))_{j=1}^\infty \|_p \leq C \cdot \| (x_j)_{j=1}^\infty \|_{p,mid} \quad (3.2)$$

*pour toute suite  $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^{mid}(X)$ .*

*De plus*

$$\begin{aligned}\| T \|_{\Pi_p^{mid}(X,Y)} &:= \| \widehat{T} \| = \inf \{ c : \text{vérifient 3.1} \} \\ &= \inf \{ C : \text{vérifient 3.2} \}.\end{aligned}$$

**Remarque 3.1.1.**  $\| T \| \leq \pi_p^{mid}(T)$  pour tout  $T \in \Pi_p^{mid}(X, Y)$ .

**Théorème 3.1.2.** *L'espace  $(\Pi_p^{mid}(X, Y), \pi_p^{mid}(.))$  est un idéal de Banach*

**Définition 3.1.2. (Opérateur faiblement mid p-sommant)** On dit qu'un opérateur  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  est faiblement mid p-sommant si

$$\begin{aligned}\widehat{T} : \ell_{p,w}(X) &\longrightarrow \ell_p^{mid}(Y) \\ (x_j)_{j=1}^\infty &\longmapsto \widehat{T}((x_j)_{j=1}^\infty) = (T(x_j))_{j=1}^\infty\end{aligned}$$

est bien défini. L'espace des opérateurs faiblement mid p-sommants sera noté  $W_p^{mid}(X, Y)$ .

**Théorème 3.1.3.** *Les propriétés suivantes sont équivalentes .*

(1)  $T \in W_p^{mid}(X, Y)$  .

(2)  $L$  opérateur induit

$$\begin{aligned}\tilde{T} : \ell_{p,w}(X) &\longrightarrow \ell_p^{mid}(Y) \\ (x_j)_{j=1}^\infty &\longmapsto \tilde{T}((x_j)_{j=1}^\infty) = (T(x_j))_{j=1}^\infty\end{aligned}$$

est bien défini, linéaire et continu .

(3)  $(T(x_j))_{j=1}^\infty \in \ell_p^{mid}(Y)$  pour tout  $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^u(X)$  .

(4)  $L$  opérateur induit

$$\begin{aligned}\hat{T} : \ell_p^u(X) &\longrightarrow \ell_p^{mid}(Y) \\ (x_j)_{j=1}^\infty &\longmapsto \hat{T}((x_j)_{j=1}^\infty) = (T(x_j))_{j=1}^\infty\end{aligned}$$

est bien défini, linéaire et continu .

(5) Il existe une constante  $A > 0$ . Telle que

$$\| (T(x_j))_{j=1}^k \|_{p,mid} \leq A \cdot \| (x_j)_{j=1}^k \|_{p,w}$$

pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et tout  $x_j \in X$ ,  $j = 1, \dots, k$  .

(6) Il existe une constante  $A > 0$ . Telle que.

$$\left( \sum_{n=1}^\infty \sum_{j=1}^k |\varphi_n(T(x_j))|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq A \cdot \| (x_j)_{j=1}^k \|_{p,w} \cdot \| (\varphi_n)_{n=1}^\infty \|_{p,w} \quad (3.3)$$

pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $x_j \in X$ ,  $j = 1, \dots, k$  et tout  $(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \ell_{p,w}(Y^*)$  .

(7) Il existe une constante  $A > 0$ . Telle que

$$\left( \sum_{n=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty |\varphi_n(T(x_j))|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq A \cdot \| (x_j)_{j=1}^\infty \|_{p,w} \cdot \| (\varphi_n)_{n=1}^\infty \|_{p,w} \quad (3.4)$$

pour tout  $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{p,w}(X)$  et tout  $(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \ell_{p,w}(Y^*)$  .

De plus

$$\begin{aligned} \|T\|_{W_p^{mid}(X,Y)} &= \|\tilde{T}\| = \|\widehat{T}\| = \inf \{A, A \text{ vérifiant 3.3}\} \\ &= \inf \{A, A \text{ vérifiant 3.4}\}. \end{aligned}$$

**Remarque 3.1.2.**  $\|T\| \leq w_p^{mid}(T)$  pour tout  $T \in W_p^{mid}(X, Y)$ .

**Théorème 3.1.4.** *L'espace  $(W_p^{mid}(X, Y), w_p^{mid}(\cdot))$  est un idéal de Banach*

*Démonstration.*

1)  $W_p^{mid}(X, Y)$  est un sous espace vectoriel de  $\mathcal{L}(X, Y)$  et  $\mathcal{L}_f(X, Y) \subset W_p^{mid}(X, Y)$

a) Soit  $S, T \in W_p^{mid}(X, Y)$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$

(i) On a

$$\begin{aligned} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^k |\varphi_n((T+S)(x_j))|^p \right)^{\frac{1}{p}} &= \left( \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^k |\varphi_n(T(x_j) + S(x_j))|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left( \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^k |\varphi_n(T(x_j)) + \varphi_n(S(x_j))|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left( \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^k |\varphi_n(T(x_j))|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad + \left( \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^k |\varphi_n(S(x_j))|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq [w_p^{mid}(T) + w_p^{mid}(S)] \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{p,w} \cdot \|\varphi_n\|_{n=1}^{\infty} \end{aligned}$$

Donc  $T + S \in W_p^{mid}(X, Y)$  et  $w_p^{mid}(T + S) \leq w_p^{mid}(T) + w_p^{mid}(S)$ .

(ii) Pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$  on a

$$\begin{aligned} \|(\lambda T)(x_i)_{i=1}^n\|_{W_p^{mid}} &= \|(T(\lambda x_i)_{i=1}^n)\|_{W_p^{mid}} \\ &\leq w_p^{mid}(T) \|(\lambda x_i)_{i=1}^{\infty}\|_{p,w} \|\varphi_n\|_{n=1}^{\infty} \\ &\leq |\lambda| w_p^{mid}(T) \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{p,w} \cdot \|\varphi_n\|_{n=1}^{\infty} \end{aligned}$$

Alors  $(\lambda T) \in W_p^{mid}(X, Y)$  et  $w_p^{mid}(\lambda T) \leq |\lambda| w_p^{mid}(T)$ .

D'autre parti on a

$$\begin{aligned} w_p^{mid}(T) &= w_p^{mid}\left(\frac{1}{\lambda} \lambda T\right) \\ &= w_p^{mid}(\lambda' S) \\ &= |\lambda'| w_p^{mid}(S) = \frac{1}{|\lambda|} w_p^{mid}(\lambda T). \end{aligned}$$

Donc  $w_p^{mid}(\lambda T) = |\lambda| w_p^{mid}(T)$ .

(iii) On a

$$\begin{aligned} \|T\| \leq w_p^{mid}(T) = 0 &\Leftrightarrow \|T\| = 0 \\ &\Leftrightarrow T = 0. \end{aligned}$$

Donc  $(W_p^{mid}(X, Y), w_p^{mid}(\cdot))$  est sous espace vectoriel normé.

b)  $\mathcal{L}_f(X, Y) \subset W_p^{mid}(X, Y)$  Il suffit montre que l'opérateur T de la forme

$$T(x) = \Phi(x)y \quad \text{tell que } \Phi \in X^* y \in Y$$

$$\begin{aligned} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^k |\varphi_n(T(x_j))|^p \right)^{\frac{1}{p}} &= \left( \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^k |\varphi_n(\Phi(x_j)y)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left( \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^k |\varphi_n(y)\Phi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \|y\| \left( \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^k |\langle \varphi_n, \frac{y}{\|y\|} \rangle|^p |\Phi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \|y\| \left( \sum_{n=1}^{\infty} |\langle \varphi_n, \frac{y}{\|y\|} \rangle|^p \sum_{j=1}^{\infty} |\Phi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \|y\| \|\Phi\| \sup_{\xi \in B_Y} \sum_{n=1}^{\infty} (|\langle \varphi_n, \xi \rangle|^p)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{j=1}^k |\langle \Phi, (x_j) \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \|y\| \|\Phi\| \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{p,w} \|(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}\|_{p,w}. \end{aligned}$$

d'où  $T \in W_p^{mid}(X, Y)$  et  $w_p^{mid}(T) \leq \| \Phi \| \| y \|$

d'autre parti on a

$$\| \Phi \| \| y \| = \| T \| \leq w_p^{mid}(T).$$

Donc  $w_p^{mid}(T) = \| \Phi \| \| y \|$ .

Alors  $\mathcal{L}_f(X, Y) \subset W_p^{mid}(X, Y)$ .

## 2) Propriété d'idéal

(i) On a  $E \xrightarrow{u \in \mathcal{L}(E, X)} X \xrightarrow{T \in W_p^{mid}(X, Y)} Y \xrightarrow{\varphi_n} \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_n \circ T \circ u(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} &= \left( \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_n(T(u(x_j)))|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \sup_{\varphi_n \in B_{\ell_p^w(Y^*)}} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_n(T(u(x_j)))|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq w_p^{mid}(T) \| (u(x_j))_j \|_{p,w} \\ &\leq w_p^{mid}(T) \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left( \sum_{j=1}^{\infty} |\langle u(x_j), x^* \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq w_p^{mid}(T) \sup_{x^* \in B_{X^*}} (|\langle x_j, u^*(x^*) \rangle|^p)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \| u \| w_p^{mid}(T) \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left( |\langle x_j, \frac{u^*(x^*)}{\| u \|} \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \| u \| w_p^{mid}(T) \sup_{\xi \in B_{E^*}} (|\langle x_j, \xi \rangle|^p)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \| T \| w_p^{mid}(T) \| (x_j) \|_{p,w}. \end{aligned}$$

Donc

$$w_p^{mid}(T \circ u) \leq \| u \| w_p^{mid}(T). \quad (3.5)$$

D'autre parti on a

$$X \xrightarrow{T \in W_p^{mid}(X, Y)} Y \xrightarrow{v \in \mathcal{L}(X, Y)} F \xrightarrow{\varphi_n} \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
 \left( \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_n \circ v \circ T(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left( \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_n \circ v(T(x_j))|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq \sup_{\varphi_n \in B_{\ell_p^w(F^*)}} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_n \circ v(T(x_j))|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq \|v\| \sup_{\varphi_n \in B_{\ell_p^w(F^*)}} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left| \frac{\varphi_n \circ v}{\|v\|} (T(x_j)) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq \|v\| \sup_{\xi_n \in B_{\ell_p^w(Y^*)}} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_n(T(x_j))|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq \|v\| w_p^{mid}(T) \| (x_j) \|_{p,w} .
 \end{aligned}$$

Donc

$$w_p^{mid}(v \circ T) \leq \|v\| w_p^{mid}(T) . \quad (3.6)$$

Alors d'après (3.5) et (3.6) on a

$$(v \circ T \circ u) \in W_p^{mid}(E, F) \text{ et } w_p^{mid}(v \circ T \circ u) \leq \|v\| w_p^{mid}(T) \|u\| .$$

(ii)  $\|T : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K} : T(\lambda) = \lambda\|_{W_p^{mid}(E, F)} = 1$

$$\begin{aligned}
 \left( \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_n(T(\lambda_j))|^p \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left( \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_n(\lambda_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq \left( \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \|\varphi_n\|^p |\lambda_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &= \left( \sum_{n=1}^{\infty} \|\varphi_n\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq \|(\varphi_n)_n\|_{\ell_{p,w}(\mathbb{K})} \|(\lambda_j)_j\|_{\ell_{p,w}(\mathbb{K})} .
 \end{aligned}$$

donc  $T \in W_p^{mid}(X, Y)$  et  $w_p^{mid}(T) \leq 1$  de plus  $1 = \|T\| \leq w_p^{mid}(T) \leq 1$ . Alors  $w_p^{mid}(T) = 1$ .

(iii)  $(W_p^{mid}(X, Y), w_p^{mid}(\cdot))$  est Banach. Soit  $(T_r)$  une suite de Cauchy de  $W_p^{mid}(X, Y)$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall r, m \in \mathbb{N}; n, m \geq n_0, \|T_r - T_m\|_{W_p^{mid}(X, Y)} \leq \varepsilon .$$



on a pour tout  $r, m \geq n_0$

$$\|T_r - T_m\| \leq \|T_r - T_m\|_{W_p^{mid}(X,Y)} \leq \varepsilon$$

Donc  $(T_r)$  est une suite de Cauchy de  $\mathcal{L}(X, Y)$ .

Comme  $\mathcal{L}(X, Y)$  est un Banach ( $X$  complet), alors

$$T_r \xrightarrow{\|\cdot\|} T \in \mathcal{L}(X, Y) \text{ si } r \rightarrow \infty.$$

D'autre part, pour  $r, m \geq n_0$ , on a

$$\begin{aligned} \left( \sum_{j=1}^k \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(T_r - T_m)(x_j)| \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \|T_r - T_m\|_{W_p^{mid}} \| (x_j)_{j=1}^{\infty} \|_{p,w} \cdot \| (\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \|_{p,w} \\ &\leq \varepsilon \| (x_j)_{j=1}^{\infty} \|_{p,w} \cdot \| (\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \|_{p,w} \end{aligned}$$

quant  $r \rightarrow \infty$ , on ait

$$\left( \sum_{j=1}^k \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(T - T_m)(x_j)| \right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon \| (x_j)_{j=1}^{\infty} \|_{p,w} \cdot \| (\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \|_{p,w} \quad \forall m \geq n_0$$

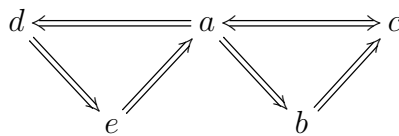
Alors  $T - T_m \in W_p^{mid}(X, Y)$ . Donc  $T = (T - T_m) + T_m \in W_p^{mid}(X, Y)$  et par conséquent  $(W_p^{mid}, \|\cdot\|_{W_p^{mid}})$  est complet.

D'où,  $(W_p^{mid}(X, Y), w_p^{mid}(\cdot))$  est un idéal de Banach des opérateurs linéaires.  $\square$

**Théorème 3.1.5.** *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

- (a)  $X$  est faiblement mid  $p$ -sommable.
- (b)  $\Pi_p^{mid}(X, Y) = \Pi_p(X; Y)$  pour tout espace de Banach  $Y$ .
- (c)  $\Pi_p^{mid}(X, \ell_p) = \Pi_p(X; \ell_p) = \mathcal{L}(X; \ell_p)$ .
- (d)  $W_p^{mid}(X, Y) = \mathcal{L}(X, Y)$  pour tout espace de Banach  $Y$ .
- (e)  $id_X \in W_p^{mid}(X; X)$ .

*Démonstration.* Nous allons démontrer comme suite



(a)  $\Rightarrow$  (b) Soit  $T \in \Pi_p^{mid}(X, Y)$  tel que, l'opérateur induite  $\tilde{T} : \ell_p(X) \rightarrow \ell_p$  est bien défini, linéaire et continue. Donc cette façon comme  $X$  est un espace faiblement mid p-sommable, c'est  $\ell_p^{mid}(X) = \ell_p^w(X)$ , on obtiens que l'opérateur induite  $\tilde{T} : \ell_{p,w}(X) \rightarrow \ell_p(X)$ , aussi bien défini, linéaire et continu, cela montre que  $T \in \Pi_p(X, Y)$ , les mêmes montrent l'inclusion  $\Pi_p^{mid}(X, Y) \subseteq \Pi_p(X, Y)$ .

(d)  $\Rightarrow$  (e) Évident.

(e)  $\Rightarrow$  (a) Si  $id_X \in W_p^{mid}(X, X)$ , Alors l'opérateur induite  $\widetilde{id_X} : \ell_{p,w} \rightarrow \ell_p^{mid}(X)$  est bien défini. Donc nous pouvons identifier  $\ell_{p,w}(X)$  comme  $\ell_p^{mid}(X)$  par la relation ci-dessus et  $\ell_{p,w}(X) = \ell_p^{mid}$  et un espace faiblement mid p-sommable.

(b)  $\Rightarrow$  (la première égalité en (c)) Évident.

(la première égalité en (c))  $\Rightarrow$  (a) soit  $x^* = (x_k^*)_{k=1}^\infty \in \ell_{p,w}(X^*)$ , l'identification  $\ell_{p,w}(X^*) = \mathcal{L}(X, \ell_p)$  ([10] voir le preuve proposition (2.12)) donne que

$$\begin{aligned} S_{x^*} : X &\longrightarrow \ell_p \\ x &\longmapsto S_{x^*}(x) = (x_k^*(x))_{k=1}^\infty \end{aligned}$$

est un opérateur linéaire borné, par la définition de  $\ell_p^{mid}(X)$

$$(S_{x^*}(x_n))_{n=1}^\infty = ((x_k^*(x_n))_{k=1}^\infty)_{n=1}^\infty \in \ell_p(\ell_p)$$

pour tout  $(x_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p^{mid}(X)$ . Cela signifie que  $S_{x^*} \in \Pi_p^{mid}(X; \ell_p)$ ,

pour tout  $x^* = (x_k^*)_{k=1}^\infty \in \ell_{p,w}(X^*)$ . Donc donné  $(x_n)_{n=1}^\infty \in \ell_{p,w}(X)$ , il s'ensuit que

$(S_{x^*}(x_n))_{n=1}^\infty = ((x_k^*(x_n))_{k=1}^\infty)_{n=1}^\infty \in \ell_p(\ell_p)$  pour tout  $x^* = (x_k^*)_{k=1}^\infty \in \ell_{p,w}(X^*)$ ; on prouve que  $(x_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p^{mid}(X)$ .

Que (a) est équivalent à la deuxième égalité en (c) est précisément le théorème (2.1.1) le compléter la preuve, laissons nous vérifier (a)  $\implies$  (d). Soit  $T \in \mathcal{L}(Y, X)$  et  $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{p,w}(Y)$  donné, la stabilité linéaire de  $\ell_{p,w}(X)$  et l'hypothèse donné

$(T(x_j))_{j=1}^\infty \in \ell_{p,w}(X) = \ell_p^{mid}(X)$ . Cela prouve que  $T \in W_p^{mid}(Y; X)$ .

□

**Théorème 3.1.6. (Théorème de factorisation)** *Tout opérateur linéaire p-sommant*

se factorise par deux opérateurs linéaires faiblement mid  $p$ -sommant et fortement mid  $p$ -sommant, c'est à dire  $\Pi_p = \Pi_p^{mid} \circ W_p^{mid}$ .

*Démonstration.* Soient  $(x_i)_i \in X$ ,  $T \in \Pi_p^{mid}(Y, Z)$  et  $S \in W_p^{mid}(X, Y)$ . Alors

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i=1}^n \|T \circ S(x_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} &= \left( \sum_{i=1}^n \|T(S(x_i))\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \pi_p^{mid}(T) \| (S(x_i))_{i=1} \|_{p, mid} \\ &\leq \pi_p^{mid}(T) . w_p^{mid}(S) \| (x_i)_i \|_{p, w} . \end{aligned}$$

Donc  $T \circ S \in \Pi_p(X, Z)$  et  $\pi_p(T \circ S) \leq \pi_p^{mid}(T) . w_p^{mid}(S)$ .

Alors  $\Pi_p^{mid} \circ W_p^{mid} \subseteq \Pi_p$ .

Nous avons déjà que  $\Pi_p^{mid} \circ W_p^{mid} \subseteq \Pi_p$ , soit  $u \in \Pi_p(X, Y)$  par le théorème de factorisation de Pietsch ([1] corollary 1, page 130] ou [[8] theorem 2.13]) on a la mesure de Borel-Radon  $\mu$  sur  $(B_{X^*}, W^*)$ , un sous-espace ferme  $Z$  de  $\ell_p(\mu)$  et un opérateur  $\hat{u} : Z \rightarrow Y$ . Alors le diagramme suivant commute ( $i_X$  et  $j_p$  et sont des opérateur canonique et  $j_p^X$  est restriction de  $j_p$  à  $i_X(X)$ )

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & Y \\ i_X \downarrow & & \uparrow \hat{u} \\ i_X(X) & \xrightarrow{j_p^X} & Z \\ \downarrow & & \downarrow \\ C(K) & \xrightarrow{j_p} & L_p(\mu) \end{array}$$

soit  $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^w(X)$ , par la continuité de  $i_X$  et la stabilité linéaire de  $\ell_p^w(\cdot)$ , on a  $(i_X(x_j))_{j=1}^\infty \in \ell_p^w(i_X(X))$ . puis que  $j$  est absolument  $p^*$ -sommant, il s'ensuit que  $(j_p^X(i_X(x_j)))_{j=1}^\infty \in \ell_p(X) \subseteq \ell_p^{mid}(X)$ , prouvant que  $j_p^X \circ i_X \in W_p^{mid}(X, Z)$ . Maintenant soit  $(y_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^{mid}(Z)$ . par théorème 2.1.1 2 on a  $(y_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p(Z)$ , donc, comme  $\hat{u}$  est bornné et  $\ell_p(\cdot)$  linéaire stable,  $(\hat{u}(y_j))_{j=1}^\infty \in \ell_p(Y)$ , prouvant que  $\hat{u} \in \Pi_p^{mid}(Z, Y)$ .  $\square$

**Corollaire 3.1.1.** Soient  $p > 1$ ,  $u \in \mathcal{L}(X, Y)$  et  $v \in \mathcal{L}(X, Y)$  si  $u^*$  est mid  $p^*$ -sommant et  $v^*$  est faiblement  $p^*$ -sommant. Alors  $v \circ u$  est Cohen fortement  $p$ -sommant.

*Démonstration.* On note par  $\mathcal{I}^{dual}$  l'idéal de tous les opérateurs  $u$  tel que  $u^* \in \mathcal{I}$ , on a

$$(W_{p^*}^{mid})^{dual} \circ (\Pi_{p^*}^{mid})^{dual} \subseteq (\Pi_{p^*}^{mid} \circ W_{p^*}^{mid})^{dual} = \Pi_{p^*}^{dual} = \mathcal{D}_p.$$

Où les inclusions sont claires, la première égalité suit du théorème (3.1.6) et le deuxième de ([9]).  $\square$

## 3.2 Théorème de domination

Soit  $x = (x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{p,w}(X)$ . L'opérateur

$$\begin{aligned} \Psi_x : X^* &\longrightarrow \ell_p \\ x^* &\longmapsto \Psi_x(x^*) := (x^*(x_j))_{j=1}^\infty \end{aligned}$$

est bien défini, linéaire et continu, avec  $\|\Psi_x\| = \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{p,w}$ . De plus d'après l'inégalité de Minkowski, on a

$$\left( \sum_{n=1}^\infty \left( \sum_{j=1}^\infty |x_n^*(x_j)|^p \right) \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \sum_{j=1}^\infty \left( \sum_{n=1}^\infty |x_n^*(x_j)|^p \right) \right)^{\frac{1}{p}} \quad (3.7)$$

et si  $x = (x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^{mid}(X)$ , alors l'opérateur induit

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi} : \ell_{p,w}(X^*) &\longrightarrow \ell_p(\ell_p) \\ (x_n^*)_{n=1}^\infty &\longmapsto \tilde{\Psi}_x((x_n^*)_{n=1}^\infty) := ((x_n^*(x_j))_{j=1}^\infty)_{n=1}^\infty \end{aligned}$$

est bien défini, linéaire et continu par le théorème du Graphe fermé avec

$$\|\Psi_x\| \leq \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_p.$$

**Théorème 3.2.1.** *Soit  $x = (x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{p,w}(X)$ . Si*

$$(i) \quad x = (x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^{mid}(X) .$$

$$(ii) \quad \Psi_x \in \Pi_p(X^*; \ell_p) .$$

*Alors  $\pi_p(\Psi_x) = \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_p$ .*

*Démonstration.* D'après **3.7**, si  $x = (x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^{mid}$ , on a

$$\begin{aligned} \left( \sum_{n=1}^\infty \| (\Psi_x(x^*))_{n=1}^\infty \|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left( \sum_{n=1}^\infty \left( \sum_{j=1}^\infty |x_n^*(x_j)|^p \right) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left( \sum_{j=1}^\infty \left( \sum_{n=1}^\infty |x_n^*(x_j)|^p \right) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \end{aligned}$$

pour tout  $(x_n^*)_{n=1}^\infty \in \ell_{p,w}(X^*)$ . Alors  $\Psi_x \in \Pi_p(X^*; \ell_p)$  et  $\pi_p(\Psi_x) = \|\Psi_x\| = \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_p$ .  $\square$

**Théorème 3.2.2.** *Soit  $T \in \mathcal{L}(X; Y)$  les propriétés suivantes sont équivalentes .*

- a) *T est faiblement mid p-sommants .*
- b) *Il existe une constante  $C > 0$  et une mesure de probabilité régulière de Borel  $\mu$  sur  $B_{Y^{**}}$  telle que*

$$\left( \sum_{j=1}^\infty |y^*(T(x_j))|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \cdot \left( \int_{B_{Y^{**}}} |\varphi(y^*)|^p d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (3.8)$$

*pour tout  $y^* \in B_{Y^*}$  et tout  $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{p,w}(X)$  .*

- c) *Il existe une Constante  $C > 0$  et une mesure de probabilité régulière de Borel  $\mu$  sur  $B_{Y^{**}}$  telle que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a*

$$\left( \sum_{j=1}^k |y^*(T(x_j))|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \cdot \left( \int_{B_{Y^{**}}} |\varphi(y^*)|^p d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (3.9)$$

*pour tout  $y^* \in B_{Y^*}$  et tout  $x_1, \dots, x_k \in X$  .*

*Démonstration.* **a)  $\Rightarrow$  b)** Si  $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{p,w}(X)$ , on a  $y = (T(x_j))_{j=1}^\infty \in \ell_p^{mid}(Y)$  et la Théorème (**3.2.1**) s'assure que  $\Psi_y : Y^* \rightarrow \ell_p$  est p-sommants. Donc Il existe une constante  $C > 0$  et une mesure de probabilité régulière de Borel  $\mu$  sur  $B_{Y^{**}}$  telle que

$$\|\Psi_y(y^*)\|_p \leq C \cdot \left( \int_{B_{Y^{**}}} |\varphi(y^*)|^p d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{p}}$$

pour tout  $y^* \in B_{Y^*}$ , c'est à dire

$$\left( \sum_{j=1}^\infty |x^*(T(x_j))|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \cdot \left( \int_{B_{Y^{**}}} |\varphi(x^*)|^p d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{p}},$$

Pou tout  $x^* \in B_{Y^*}$ .

$b) \Rightarrow a)$  Toujours en considérant  $y = (T(x_j))_{j=1}^\infty$ , si  $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{p,w}(X)$ , par (3.8) on obtenons  $(x^*(T(x_j)))_{j=1}^\infty \in \ell_p$ , pour tout  $x^* \in B_{Y^*}$   $\Psi_y : Y^* \longrightarrow \ell_p$  est p-sommants, et on utilise le théorème (3.2.1) , on conclure  $(T(x_j))_{j=1}^\infty \in \ell_p^{mid}(Y)$ .

$b) \Rightarrow c)$  est évidente .

□

---

## CONCLUSION

L'espace des suite mid  $p$ -sommable, est un nouveau espace défini par Karn et Sinh dans [2].

Dans ce travail, nous avons effectué une étude détaillé à ce thème, et nous avons présenté des théorème, quelque propriétés sur cet espace, et on défini les opérateur de cet espace comme les opérateurs mid  $p$ -sommants et les opérateurs faiblement mid  $p$ -sommants .